Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 1 WP001B
3 juli 2014, 12.30–15.30

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. (a) Formuleer de stelling van Bolzano-Weierstrass. (Er wordt dus géén bewijs gevraagd.)

   (b) Formuleer de stelling van Heine-Borel.

   (c) Bewijs de stelling van Heine-Borel zoals geformuleerd in (b) met behulp van de stelling van Bolzano-Weierstrass zoals geformuleerd in (a).

2. (a) Wanneer heet de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent en wanneer heet de reeks absoluut convergent?

   (b) Geef van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld:

   (i) Als $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ een begrensde rij is en $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is een convergente reeks, dan is de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ convergent.

   (ii) Zij $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en zij $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent, dan is $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ divergent.

   (iii) Als $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = L$ dan geldt ook $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L$.

3. (a) Veronderstel $X \subset \mathbb{R}$, geef de definitie van de afsluiting $\overline{X}$ van X.

   (b) Veronderstel $X \subset \mathbb{R}$ en $f\colon X \to \mathbb{R}$ voldoet aan $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$ voor alle $x, y \in X$ voor zekere positieve constante M. Laat zien dat f uniform continu is.

   (c) Veronderstel dat de functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ als in (b) en dat nu $X = (a, b)$ voor reële getallen a, b met $a < b$. Bewijs dat er een continue functie $g\colon \overline{X} \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in X$.

   (d) Is de functie g in (c) uniek bepaald door deze eigenschap? Geef een beargumenteerd antwoord.

ZOZ Vergeet de achterkant NIET!

4. (a) Gegeven een begrensd interval I en een functie $f\colon I \to \mathbb{R}$. Veronderstel dat $F\colon I \to \mathbb{R}$ en $G\colon I \to \mathbb{R}$ primitieve functies zijn van f. Bewijs dat er een constante $C \in \mathbb{R}$ bestaat met $F(x) = G(x) + C$ voor alle $x \in I$.
   (b) Formuleer het tweede deel van de hoofdstelling van de integraalrekening.
   (c) Bewijs de door u gegeven uitspraak van (b).

5. Veronderstel dat $a < b$ en dat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is voor elke $x \in (a,b)$. Veronderstel bovendien dat $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $x_0 \in (a,b)$ met afgeleide $f''(x_0)$ en dat f' integreerbaar is over (a,b). Laat zien dat voor elke $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor $x \in (a,b)$ met $|x - x_0| < \delta$ geldt

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2| \leq \varepsilon |x - x_0|^2$$

   (*Hint.* Beschouw de Newton approximatie voor f' in het punt x_0.)

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	9	11	9	9	7	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.
In het uiteindelijke eindcijfer worden de resultaten van het huiswerk en/of tussentoets verwerkt op de wijze zoals beschreven in de studiewijzer. De resultaten voor het huiswerk en de tussentoets kunnen alleen in uw voordeel werken.

Summiere uitwerkingen en hints

1. (a) Theorem 6.6.8 (p.174)

   (b) Theorem 9.1.24 (p.248)

   (c) (a) impliceert (b):

   Kies rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $a_n \in X$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Omdat X begrensd is, is de rij begrensd. Vanwege de stelling van Bolzano-Weierstrass heeft de rij een convergente deelrij, zeg $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = L$. Omdat $a_{n_j} \in X$ voor alle j volgt dat $L \in \overline{X} = X$, omdat X gesloten is.

   (b) impliceert (a):

   <u>X gesloten.</u> Kies $x \in \overline{X}$. Dan bestaat er een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $a_n \in X$ voor alleen $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Aangezien elke deelrij van een convergente rij convergent is met dezelfde limiet, volgt uit (b) dat $x \in X$. Dus $\overline{X} \subset X$ en X is gesloten.

   <u>X begrensd.</u> Stel X is niet begrensd, dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat

   $$X_n = \{x \in X \mid |x| \geq n\} \neq \emptyset$$

   Met behulp van het keuzeaxioma kiezen we een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $a_n \in X_n \subset X$ voor alle n. Volgens (b) bestaat er een convergente deelrij $(b_j)_{j=0}^{\infty}$ met $b_j = a_{n_j}$ met $n_{j+1} > n_j$ en dus in het bijzonder $n_j \geq j$. Omdat $(b_j)_{j=0}^{\infty}$ convergent is, is de rij begrensd. Ofwel er bestaat een $M \in \mathbb{R}$ met $|b_j| \leq M$ voor alle $j \in \mathbb{N}$. Anderzijds is $b|b_j| = |a_{n_j}| \geq n_j \geq j$ voor alle j, zodat voor $j > M$ een tegenspraak is. Dus X is begrensd.

2. (a) Definition 7.2.2 (p.190), Definition 7.2.8 (p.192)

   (b) (i) Niet waar. Neem $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ en $b_n = (-1)^n$.

   (ii) Waar. Omdat de reeks convergent is volgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \neq 0$ (de rij $(\frac{1}{a_n})_{n=0}^{\infty}$ divergeert naar ∞.) Dus is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ divergent.

   (iii) Waar. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig dan bestaat er $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat

   $$\begin{aligned} L - \varepsilon < a_{n+1} - a_n < L + \varepsilon &\implies L + a_n - \varepsilon < a_{n+1} < L + a_n + \varepsilon \\ &\implies k(L-\varepsilon) + a_N < a_{N+k} < k(L+\varepsilon) + a_N \\ &\implies \frac{k}{N+k}(L-\varepsilon) + \frac{a_N}{N+k} < \frac{a_{N+k}}{N+k} < \frac{k}{N+k}(L+\varepsilon) + \frac{a_N}{N+k} \\ &\implies -\frac{k}{N+k}\varepsilon + \frac{a_N - NL}{N+k} < \frac{a_{N+k}}{N+k} - L < \frac{k}{N+k}\varepsilon + \frac{a_N - NL}{N+k} \\ &\implies |\frac{a_{N+k}}{N+k} - L| < \frac{k}{N+k}\varepsilon + \frac{|a_N| + N|L|}{N+k} \end{aligned}$$

   voor alle $k \in \mathbb{N}$. Kies vervolgens M zodanig dat voor alle $k \geq M$ geldt dat $|\frac{|a_N|+N|L|}{N+k}| \leq \varepsilon$. Dan geldt voor alle $n \geq N + M$ dat $|\frac{a_n}{n} - L| < 2\varepsilon$.

3. (a) Definition 9.1.10 (p.245)

   (b) In Definition 9.9.2 (p.280); voor een willekeurige $\varepsilon > 0$ kunnen we $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ nemen (als $M > 0$). Het triviale geval $M = 0$, neem bijvoorbeeld $\delta = \varepsilon$.)

   (c) We hoeven alleen te $g(x)$ te bepalen voor $x \in \overline{X} \setminus X$. Kies een rij $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ met $x_n \in X$ en $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dan is dit in het bijzonder een Cauchyrij in X. Uit de uniforme continuïteit volgt dat f Cauchyrijtjes omzet in Cauchyrijen, dus $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ is een Cauchyrij, en dus convergent in $\mathbb{R}$. Stel $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

   Om te laten zien dat g continu is in x kiezen we een willekeurige (andere) rij $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ die convergeert naar x. Deze rij is equivalent met $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, en dus zijn de beeldrijen equivalent. Voor equivalente rijen waarvan een rij convergent is, geldt dat de andere rij ook convergent is met dezelfde limiet. Dus $g(x)$ is bepaald onafhankelijk van de keuze van de rij.

   (d) Ja, limieten zijn uniek bepaald.

4. (a) Kies $x, y \in I$ willekeurig, en veronderstel $x < y$. Dan is $[x, y] \subset I$. Dan voldoet de functie $F - G\colon [x, y] \to \mathbb{R}$ aan de voorwaarden van de middelwaardestelling, en dan geldt

$$\frac{(F-G)(x) - (F-G)(y)}{x - y} = (F-G)'(c) = f(c) - f(c) = 0$$

   voor een $c \in (x, y)$. Dus is $(F - G)(x) = (F - G)(y)$ voor alle $x, y \in I$. Neem y vast en stel $C = (F - G)(y)$, dan is $F(x) - G(x) = C$ voor alle $x \in I$.

   (b) Theorem 11.9.4 (p.341)

   (c) p.341-2.

5. Gebruik de Newton approximatie voor $f''(x_0)$ als afgeleide van $f'\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Dus voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat als $|x - x_0| < \delta$ en $x \in (a, b)$, dan

$$|f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

   Veronderstel nu eerst dat $x > x_0$. Dan

$$-\varepsilon(x - x_0) \leq f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) \leq \varepsilon(x - x_0)$$

   en integreer over het interval $[x_0, y]$ met $|x_0 - y| < \delta$. Dan blijven de ongelijkheden behouden

$$-\frac{1}{2}\varepsilon(y - x_0)^2 \leq f(y) - f(x_0) - f'(x_0)(y - x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)(y - x_0)^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon(y - x_0)^2$$

   Dit geeft het geval $y \geq x_0$. Het andere geval gaat analoog.