

Tentamen Calculus 2
27 januari 2011, 9:00 -12:00 uur

Je mag geen rekenapparaat gebruiken.

De opgaven 1 t.e.m. 6 tellen allemaal even zwaar.

Vermeld op elk papier dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef bij elke opgave niet alleen het antwoord, maar leg ook uit waarom het door jou gegeven antwoord het goede antwoord is. In het bijzonder: laat goed zien waar en hoe je partiële integratie of integratie door substitutie toepast.

Veel succes!

1a. Bereken $\int_{-2}^4 |x^2 + 2x - 3| dx$.

1b. Bereken $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$.

2a. Bereken $\int_0^\pi \sin^3(x) \cos^2(x) dx$.

2b. Bereken $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx$.

3a. Bepaal een differentieerbare functie f van \mathbb{R} naar \mathbb{R} die voldoet aan:
voor elke x in \mathbb{R} , $f'(x) = x^2 f(x)$ en $f(1) = 1$.
Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

3b. Bepaal een tweemaal differentieerbare functie van \mathbb{R} naar \mathbb{R} die voldoet aan:
voor elke x in \mathbb{R} , $f''(x) = -4f(x)$ en $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$.
Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.
Laat ook zien dat de door jou gevonden functie de enige functie is die aan de eisen voldoet.

3c. Bepaal een tweemaal differentieerbare functie van \mathbb{R} naar \mathbb{R} die voldoet aan:
voor elke x in \mathbb{R} , $f''(x) = -4f(x) + 2f'(x)$ en $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$.
Laat zien dat je functie aan de eisen voldoet.

4. Zij R de verzameling van alle punten (x, y) in \mathbb{R}^2 die voldoen aan: $0 \leq x \leq 1$ en $x^3 \leq y \leq x^2$.

4a. Maak een schets van R en bereken de oppervlakte van R .

4b. Bereken de coördinaten x_0, y_0 van het zwaartepunt (x_0, y_0) van R .

4c. Bereken de inhoud van de ruimtelijke figuur die ontstaat door R om de y -as te wentelen.

5a. Ga na of de volgende limiet bestaat. Zonee, leg uit waarom niet; zoja, bereken zijn waarde.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \cos(x) - 1 - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

5b. De volgende integralen zijn oneigenlijke integralen.

Ga voor beide integralen na of de integraal bestaat. Zonee, leg uit waarom niet; zoja, bereken de waarde van de integraal.

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ en } \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx.$$

6a. Bereken reële getallen a en b zó dat $\frac{3+4i}{3-4i} = a + bi$. Schets de positie van $\frac{3+4i}{3-4i}$ in het complexe vlak en bereken reële getallen r en ϕ zó dat $\frac{3+4i}{3-4i} = re^{i\phi}$.

6b. Bereken reële getallen a en b zó dat $a + bi = \left(\frac{3+4i}{3-4i}\right)^2$.

6c. Bereken alle paren reële getallen (a, b) zó dat het complexe getal $z = a + bi$ voldoet aan $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

Bonus-opgave: Bewijs dat er geen natuurlijk getal $n > 0$ bestaat zó dat $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n = 1$.