

Getallen

toets 3: 14 december 2009, 15:45–17:30

Dit is de derde van de vier toetsen van Getallen. Laat N het totale aantal punten zijn dat voor de toetsen wordt behaald (het maximale aantal is 110). Het eindcijfer van Getallen wordt bepaald op het mondelinge tentamen en zal niet lager zijn dan $\frac{N-10}{10}$, afgerond op halve punten. Met deze toets kunnen 28 punten worden behaald.

Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:

naam

naam werkcollegeassistent

en verder op ieder blad je naam.

Bij de opgaven 1 en 4 worden aantallen gevraagd. Geef een toelichting bij de antwoorden.

1. (4 punten)

Hoeveel permutaties σ van 100 zijn er met $\sigma(a)$ een even natuurlijk getal voor alle $a \leq 50$?

2. (5 punten)

Laat zien dat $\sum_{k=0}^{50} \binom{100}{k} \binom{100}{50-k} = \binom{200}{50}$.

3. (i) (3 punten)

Voor $x, y \in \mathbb{N}^*$ met $\text{ggd}(x, y) = 1$ geldt dat $4xy$ een kwadraat van een natuurlijk getal is. Toon aan dat x en y beide een kwadraat van een natuurlijk getal zijn.

(ii) (3 punten)

Voor $x, y \in \mathbb{N}^*$ met $\text{ggd}(x, y) = 1$ geldt dat $2xy$ een kwadraat van een natuurlijk getal is. Toon aan dat precies één van de getallen x en y een kwadraat van een natuurlijk getal is.

4. Gegeven zijn natuurlijke getallen $m, n \geq 1$ met $\text{ggd}(m, n) = 1$.

(i) (3 punten)

Hoeveel natuurlijke getallen $x < 100mn$ zijn er waarvoor $x \equiv 1 \pmod{m}$ en $x \equiv 1 \pmod{n}$?

(ii) (2 punten)

Hoeveel natuurlijke getallen $x < 100mn$ zijn er waarvoor $x \equiv 1 \pmod{m}$ en $x \equiv 2 \pmod{n}$?

5. (i) (4 punten)

Toon aan dat $2^{536} \equiv 2 \pmod{109}$.

(ii) (4 punten)

Bepaal de rest van 2^{636} bij deling door 109.