Propedeuse Wiskunde 2009–2010

Getallen

toets 4: 11 januari 2010, 15:45–17:30

Dit is de laatste van de vier toetsen van Getallen. Laat N het totale aantal punten zijn dat voor de toetsen wordt behaald (het maximale aantal is 110). Het eindcijfer van Getallen wordt bepaald op het mondelinge tentamen en zal niet lager zijn dan $\frac{N-10}{10}$, afgerond op halve punten. Met deze toets kunnen 27 punten worden behaald.

1. Een reëel getal α heet irrationaal als $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Ga van elk van de volgende uitspraken na of hij waar is. Geef een bewijs of anders een tegenvoorbeeld.

   (i) (**3 punten**)
   Als α een irrationaal getal is met $\alpha > 0$, dan is $\sqrt{\alpha}$ een irrationaal getal.

   (ii) (**2 punten**)
   Als α een irrationaal getal is met $\alpha > 1$, dan is $\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$ een irrationaal getal.

   (iii) (**2 punten**)
   Als α een irrationaal getal is, dan is $\sqrt{\alpha^2+1}$ een irrationaal getal.

2. Gegeven is dat de rij (α_n) van reële getallen in $\mathbb{R}$ convergeert naar $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (i) (**3 punten**)
   Bewijs dat er een rij (r_n) in $\mathbb{Q}$ is met $|\alpha_n - r_n| < \frac{1}{2^n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) (**4 punten**)
   Bewijs dat een rij (r_n) als in onderdeel (i) convergeert naar α.

3. (i) (**4 punten**)
   Toon aan dat er een reëel getal α is met $\alpha^3 = \alpha + 1$ en $1 < \alpha < 2$.

   (ii) (**2 punten**)
   Bepaal een $a \in \mathbb{N}$ waarvoor er een reëel getal α is met $\alpha^3 = \alpha + 1$ en $\frac{a}{4} < \alpha < \frac{a+1}{4}$.

4. (i) (**3 punten**)
   De ternaire (= 3-tallige) notatie van een rationaal getal a is $0{,}\overline{001}$. Schrijf a in de vorm $\frac{m}{n}$ met $m, n \in \mathbb{N}^*$.

   (ii) (**2 punten**)
   Er zijn 3^5 rationale getallen die ternair genoteerd kunnen worden als $0{,}\overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$ (met $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{N}_3$). Welke zijn dat? (Geef ze in de vorm $\frac{m}{n}$ met $m, n \in \mathbb{N}$.)

   (iii) (**2 punten**)
   De ternaire notatie van het rationale getal b is $0{,}\overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$. Toon aan dat

$$121 \cdot b \in \mathbb{N} \iff 2 \mid c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5.$$